Betrachtungen über gewisse Reihen *

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich herausgefunden hatte, dass die Summen der in dieser Form enthaltenen reziproken Reihen

$$1 \pm \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} \pm \frac{1}{11^n} + \text{etc.},$$

wo die oberen der zweideutigen Vorzeichen gelten, wenn n eine gerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn n eine ungerade Zahl ist, von der Quadratur des Kreises abhängen und durch eine so große Potenz der Peripherie des Kreises π bestimmt werden, deren Exponent $= n$ ist, haben sich mir einige Beobachtungen offenbart, die sich sowohl auf diese Reihen selbst als auch auf deren Gebrauch beim Summieren von anderen Reihen beziehen. Weil diese nicht sehr offensichtlich sind und vielleicht bei anderen Aufgaben einen nicht zu verachtenden Nutzen verschaffen können, war ich der Meinung, dass es nicht unpassend sein wird, sie hier zu erklären.

§2 Nachdem durchgehend das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie des Kreises als 1 zu π festgelegt worden ist, betrachte ich den Kreis, dessen Radius oder Halbmesser $= 1$ ist, und π wird seinen halben Umfang oder einen Bogen von 180 Grad bezeichnen. Wenn daher nun in diesem Kreis ein Bogen $= s$ angenommen wird, dessen Sinus $= y$, Kosinus $= x$ und Tangens

*Originaltitel: "De seriebus quibusdam considerationes", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 12*, 1750, pp. 53-96", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 407 - 462 ", Eneström-Nummer E130, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$= t$ sei, wird gelten

$$y = s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{s^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{etc.},$$
$$x = 1 - \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \text{etc.}$$

und daher

$$0 = t - s - \frac{s^2 t}{1\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^4 t}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdots 5} - \frac{s^6 t}{1\cdot 2\cdots 6} + \text{etc.}$$

oder

$$0 = 1 - \frac{s}{t} - \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{s^5}{1\cdot 2\cdots 5} - \frac{s^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \text{etc.}$$

§3 Wir wollen zuerst die Gleichung betrachten, in welcher die Relation zwischen dem Sinus y und dem Bogen ys enthalten ist, und es ist offenbar, dass der Wert s für gegebenes y nicht konstant ist, sondern all die Bogen bezeichnet, die denselben gemeinsamen Sinus y haben. Es sei der kleinste dieser Bogen $= \frac{m}{n}\pi$; so werden alle folgenden Bogen

$$\begin{array}{llllll} \frac{m}{n}\pi, & \frac{n-m}{n}\pi, & \frac{2n+m}{n}\pi, & \frac{3n-m}{n}\pi, & \frac{4n+m}{n}\pi & \text{etc.} \\ \frac{-n-m}{n}\pi, & \frac{-2n+m}{n}\pi, & \frac{-3n-m}{n}\pi, & \frac{-4n+m}{n}\pi, & \frac{-5n-m}{n}\pi & \text{etc.} \end{array}$$

denselben Sinus y haben. Deshalb wird man die folgenden unzähligen Faktoren dieser Gleichung

$$0-\frac{s}{1y}+\frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3y}-\frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}+\frac{s^7}{1\cdot 2\cdots 7y}-\text{etc.}$$

haben

$$\left(1-\frac{ns}{m\pi}\right)\left(1+\frac{ns}{(n+m)\pi}\right)\left(1-\frac{ns}{(n-m)\pi}\right)\left(1+\frac{ns}{(2n-m)\pi}\right)\left(1-\frac{ns}{(2n+m)\pi}\right)\text{etc.}$$

§4 Daher werden deshalb die Werte von $\frac{1}{s}$ die folgende Reihe festlegen

$$\frac{n}{m\pi}+\frac{n}{(n-m)\pi}-\frac{n}{(n+m)\pi}-\frac{n}{(2n-m)\pi}+\frac{n}{(2n+m)\pi}+\frac{n}{(3n-m)\pi}-\text{etc.}$$

Die Summe von diesen wird deshalb dem Koeffizienten von $-s$ in der Gleichung gleich sein, der dieser ist

$$=\frac{1}{1y}.$$

Die Summe der Produkte aus je zweien wird $=0$ sein, die Summe aus je dreien

$$=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3y}\quad\text{etc.,}$$

es wird sich weiter wie folgt verhalten:

$$
\begin{aligned}
&\text{Summe der Terme} && = -\frac{1}{1y},\\
&\text{Summe der Produkte aus je zwei} && = 0,\\
&\text{Summe der Produkte aus je drei} && = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3y},\\
&\text{Summe der Produkte aus je vier} && = 0,\\
&\text{Summe der Produkte aus je fünf} && = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y},\\
&\text{Summe der Produkte aus je sechs} && = 0,\\
&\text{Summe der Produkte aus je sieben} && = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7y},\\
&\text{Summe der Produkte aus je acht} && = 0
\end{aligned}
$$

etc.

§5 Wenn daher aber allgemein für irgendeine Reihe

$$a+b+c+d+e+\text{etc.}$$

galt

$$\begin{aligned}
&\text{Summe der Terme selbst} &&= \alpha,\\
&\text{Summe der Produkte aus je zwei} &&= \beta,\\
&\text{Summe der Produkte aus je drei} &&= \gamma,\\
&\text{Summe der Produkte aus je vier} &&= \delta,\\
&\text{Summe der Produkte aus je fünf} &&= \varepsilon,\\
&\text{Summe der Produkte aus je sechs} &&= \zeta,
\end{aligned}$$

etc.,

werden aus diesen die Summen der Quadrate, der Kuben, der Biquadrate und jeglicher Potenzen der Terme dieser Reihe angegeben werden können. Wenn daher nämlich gilt

$$\begin{aligned}
a + b + c + d + \text{etc.} &= A,\\
a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} &= B,\\
a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} &= C,\\
a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{etc.} &= D,\\
a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + \text{etc.} &= E,\\
a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + \text{etc.} &= F
\end{aligned}$$

etc.,

werden die Werte dieser Summen auf die folgende Weise bestimmt werden

$$
\begin{aligned}
A &= \alpha,\\
B &= \alpha A - 2\beta,\\
C &= \alpha B - \beta A + 3\gamma,\\
D &= \alpha C - \beta B + \gamma A - 4\delta,\\
E &= \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + 5\varepsilon,\\
F &= \alpha E - \beta D + \gamma C - \delta B + \varepsilon A - 6\zeta
\end{aligned}
$$

etc.

Weil diese Progression ein leichtes Bildungsgesetz hat und aus den vorhergehenden Termen jeglicher Term bequem definiert werden kann, werden wir die Werte der oberen Reihe $\frac{1}{s}$, die die Summe irgendwelcher Potenzen der Terme darbietet, bestimmen können.

§6 Bevor wir aber diese allgemeine allgemeine Progression verlassen, wird es passend sein die einzigartige Eigenschaft anzumerken, welche die Werte Buchstaben A, B, C, D etc. haben. Sie entspringen natürlich aus der Entwicklung dieses Ausdruckes

$$\frac{\alpha - 2\beta z + 3\gamma z^2 - 4\delta z^3 + 5\varepsilon z^4 - 6\zeta z^5 + 7\eta z^6 - \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \zeta z^6 - \text{etc.}}$$

wenn freilich durch tatsächliche Division der Quotient nach Potenzen von z gefunden wird. Es wird nämlich nach auf gewohnte Weise durchgeführter Division der folgende Quotient hervorgehen

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

so dass diese Reihe jenem Bruch gleich ist. Außerdem ist es anzumerken, wenn die Summe der Reihe

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc.}$$

$= Z$ gesetzt wird, so dass Z der Nenner jenes Bruches ist, dass der Zähler $= \frac{-dZ}{dz}$. ist. Daher wird die Summe der Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

sein

$$= \frac{-dZ}{Zdz}.$$

Deshalb werden nicht nur aus den Produkten von je zwei, je drei, je vier etc. die Summen der Potenzen der vorgelegten Reihe $a + b + c + d + \text{etc.}$, natürlich die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc., gefunden werden können, sondern auch die Summe der Reihe, die die Potenzen selbst respektive mit einer neuen geometrischen Progression multipliziert festlegen, selbstredend wird die Summe dieser Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

angegeben werden können. Und diese Eigenschaft sittsam bemerkt zu haben, wird im Folgenden sehr förderlich sein, wo ich nach neuen Reihen suchen werde.

§7 Weil also von dieser Reihe

$$\frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{etc.}\right)$$

zuerst die Summe der Terme selbst gegeben ist, dann auch die Summe der Produkte aus je zwei, drei, vier und so weiter,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1y}, \\
B &= \frac{A}{1y}, \\
C &= \frac{B}{1y} - \frac{1}{1\cdot 2y}, \\
D &= \frac{C}{1y} - \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3y}, \\
E &= \frac{D}{1y} - \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4y}, \\
F &= \frac{E}{1y} - \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y}, \\
G &= \frac{F}{1y} - \frac{D}{1\cdot 2\cdot 3y} + \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5y} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6y}
\end{aligned}$$

etc.,

wird es sich verhalten wie folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{etc.} = \frac{A\pi}{n}, \\
&\frac{1}{m^2} + \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{n^2},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{m^3} + \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} + \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{n^3},$$

$$\frac{1}{m^4} + \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{n^4},$$

$$\frac{1}{m^5} + \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} + \text{etc.} = \frac{E\pi^5}{n^5},$$

$$\frac{1}{m^6} + \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(2n-m)^6} + \frac{1}{(2n+m)^6} + \text{etc.} = \frac{F\pi^6}{n^6}$$

etc.,

wo für die geraden Potenzen alle Terme das Vorzeichen $+$ haben, für die ungeraden kommen die Vorzeichen hingegen mit den Vorzeichen der ersten Reihe zusammen.

§8 Es mögen die Buchstaben A, B, C, D, E etc. die Werte beibehalten, welche wir selbigen geraden zugeteilt haben, und es sei uns diese Reihe vorgelegt

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.},$$

deren Summe wir aus der in § 6 gegebenen Regel ausfindig machen wollen. Die Summe dieser Reihe ist aber daher

$$= \frac{-dZ}{Zdz},$$

während gilt

$$Z = 1 - \frac{z}{1y} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3y} - \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdots 5y} + \frac{z^7}{1 \cdot 2 \cdots 7y} - \text{etc.} = 1 - \frac{1}{y}\sin z.$$

Daher wird wegen des an dieser Stelle konstanten y festzulegen sein

$$dZ = \frac{-dz \cos z}{y}$$

und deshalb wird die Summe der vorgelegten Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

sein

$$= \frac{\cos z}{y - \sin z}.$$

Daher wird die Summe dieser Reihe sein

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.} = \frac{z \cos z}{y - \sin z}.$$

§9 Es sei $z = \frac{p\pi}{n}$; diese Reihe wird sie Summe all dieser Reihen ausdrücken

$$\begin{array}{llllll}
+\dfrac{p}{m} + & \dfrac{p}{n-m} & - \dfrac{p}{n+m} & - \dfrac{p}{2n-m} & + \dfrac{p}{2n+m} & + \text{etc.}, \\
+\dfrac{p^2}{m^2} + & \dfrac{p^2}{(n-m)^2} & + \dfrac{p^2}{(n+m)^2} & + \dfrac{p^2}{(2n-m)^2} & + \dfrac{p^2}{(2n+m)^2} & + \text{etc.}, \\
+\dfrac{p^3}{m^3} + & \dfrac{p^3}{(n-m)^3} & - \dfrac{p^3}{(n+m)^3} & - \dfrac{p^3}{(2n-m)^3} & + \dfrac{p^3}{(2n+m)^3} & + \text{etc.}
\end{array}$$

Diese Reihen geben aber vertikal addiert

$$\frac{p}{m-p}+\frac{p}{n-m-p}-\frac{p}{n+m+p}-\frac{p}{2n-m+p}+\frac{p}{2n+m-p}+\text{etc.},$$

deren Summe also ist

$$=\frac{p\pi\cos\dfrac{p\pi}{n}}{ny-n\sin\dfrac{p\pi}{n}};$$

oder, weil y der Sinus des Bogens $\frac{m\pi}{n}$ ist, wird man die Summe dieser Reihe haben

$$=\frac{p\pi\cos\dfrac{p\pi}{n}}{n\sin\dfrac{m\pi}{n}-n\sin\dfrac{p\pi}{n}}.$$

Wenn daher festgelegt wird

$$m-p=a \quad \text{und} \quad m+p=b,$$

so dass gilt

$$m=\frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad p=\frac{b-a}{2},$$

wird die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{n-b}-\frac{1}{n+b}-\frac{1}{2n-a}+\frac{1}{2n+a}+\frac{1}{3n-b}-\frac{1}{3n+b}-\text{etc.}$$

oder von dieser

$$\frac{1}{a}+\frac{2b}{n^2-b^2}-\frac{2a}{4n^2-a^2}+\frac{2b}{9n^2-b^2}-\frac{2a}{16n^2-a^2}+\frac{2b}{25n^2-b^2}-\text{etc.}$$

hervorgehen als

$$=\frac{\pi\cos\frac{(b-a)\pi}{2n}}{n\sin\frac{(b+a)\pi}{2n}-n\sin\frac{(b-a)\pi}{2n}}.$$

§10 Aber diese Dinge sind zu allgemein, dass schwer alles, was in ihnen erfasst wird, erkannt werden kann. Deswegen wollen wir uns auf Spezialfälle beschränken und wollen den Sinus $y=$ dem ganzen Sinus $=1$ setzen; es wird $m=1$ und $n=2$ sein. Daher erlangen wir also die folgenden Reihen

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\text{etc.}=\frac{A\pi}{2},\\
&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{B\pi^2}{2^2},\\
&\frac{1}{1^3}+\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}-\text{etc.}=\frac{C\pi^3}{2^3},\\
&\frac{1}{1^4}+\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}=\frac{D\pi^4}{2^4}
\end{aligned}$$

etc.

oder diese

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{A\pi}{2^2},$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} = \frac{B\pi^2}{2^3},$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{etc.} = \frac{C\pi^3}{2^4},$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} = \frac{D\pi^4}{2^5},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.} = \frac{E\pi^5}{2^6},$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} = \frac{F\pi^6}{2^7},$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{etc.} = \frac{G\pi^7}{2^8},$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} = \frac{H\pi^8}{2^9}$$

etc.

Aber die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc. werden aus dem folgenden Gesetz gefunden

$$A = 1,$$

$$B = \frac{A}{1},$$

$$C = \frac{B}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2},$$

$$D = \frac{C}{1} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{D}{1} - \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\\
F &= \frac{E}{1} - \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
G &= \frac{F}{1} - \frac{D}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 6},\\
H &= \frac{G}{1} - \frac{E}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{A}{1\cdot 2\cdots 7}
\end{aligned}
$$

$$\text{etc.},$$

woher die folgenden Werte der Buchstaben aufgefunden werden

$$
\begin{aligned}
A &= 1 \cdot \frac{\pi}{2^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.},\\
B &= \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^2}{2^3} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.},\\
C &= \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{\pi^3}{2^4} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.},\\
D &= \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{\pi^4}{2^5} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.},\\
E &= \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \frac{\pi^5}{2^6} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \text{etc.},\\
F &= \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 5} \cdot \frac{\pi^6}{2^7} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.},\\
G &= \frac{61}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} \cdot \frac{\pi^7}{2^8} = 1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \text{etc.},\\
H &= \frac{272}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} \cdot \frac{\pi^8}{2^9} = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.},\\
I &= \frac{1385}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8} \cdot \frac{\pi^9}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

$$K = \frac{7936}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{11}} = 1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{etc.},$$

$$L = \frac{50521}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 10} \cdot \frac{\pi^{11}}{2^{12}} = 1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \text{etc.},$$

$$M = \frac{353792}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{13}} = 1 + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \text{etc.},$$

$$N = \frac{2702765}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 12} \cdot \frac{\pi^{13}}{2^{14}} = 1 - \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{5^{13}} - \frac{1}{7^{13}} + \text{etc.},$$

$$O = \frac{22368256}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 13} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{15}} = 1 + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \frac{1}{7^{14}} + \text{etc.}$$

etc.

§11 Hier bezeichnen die Buchstaben A, B, C nur die numerischen Koeffizienten der durch die Potenzen von zwei dividierten Potenzen von π; auch wenn sie hinreichend bequem aus einem gegebenen Gesetz definiert werden können, kann dennoch ein anderes Gesetz dargeboten werden, das für die Rechnung zuträglich scheint. Ich betrachte natürlich die Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.},$$

deren Summe, die durchgehend mit dem Buchstaben s bezeichnet werde, durch Paragraph § 8 ist

$$= \frac{\cos z}{1 - \sin z}$$

- wegen $y = 1$. Wenn daher also aus dieser Gleichung

$$s = \frac{\cos z}{1 - \sin z}$$

der Wert von s in einer Reihe ausgedrückt wird, welche nach Potenzen von z fortschreite, wird die Reihe selbst hervorgehen müssen, also

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

Es kann nämlich keine ähnliche Form, beispielsweise

$$P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + \text{etc.},$$

angegeben werden, die jener gleich ist

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.},$$

dass zugleich die Koeffizienten der Potenzen von z übereinstimmen und gilt

$$P = A, \quad Q = B, \quad R = C, \quad S = D \quad \text{etc.}$$

Aber es drückt $\frac{\cos z}{1-\sin z}$ hingegen den Tangens des Bogens $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$ aus, oder es wird sein

$$s = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$$

und dieser Sache wegen durch Invertieren

$$\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} = \arctan s = \int \frac{ds}{1+ss}$$

und nach Nehmen der Differentiale wird man wegen des konstanten $\frac{\pi}{4}$ oder dem konstanten Bogen von 45 Grad haben

$$\frac{dz}{2} = \frac{ds}{1+ss}$$

oder

$$dz + ssdz = 2ds.$$

Nun setze man

$$S = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.};$$

es wird dann sein

$$\begin{aligned}
\frac{2ds}{dz} &= 2B \;\; + 4C \;\;\; z + 6D \;\;\; z^2 + 8E \;\;\;\; z^3 + 10F \; z^4 + \text{etc.},\\
ss \;\; &= A^2 \;\; + 2ABz + 2ACz^2 + 2ADz^3 + 2AEz^4 + \text{etc.},\\
& \qquad\qquad\qquad\;\; + B^2 \;\;\; z^2 + 2BC \, z^3 + 2BDz^4\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; + C \;\;\;\; z^4\\
1 \;\;\; &= +1.
\end{aligned}$$

Nachdem nun die homogenen Terme miteinander verglichen worden sind, werden die Werte der Buchstaben so definiert, dass die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von z verschwinden; und es werden die folgenden Bestimmungen der Buchstaben A, B, C, D, E etc. erhalten werden, während, wie wir schon gefunden haben, $A = 1$ ist:

$$
\begin{aligned}
A &= 1,\\
B &= \frac{A^2+1}{2},\\
C &= \frac{2AB}{4},\\
D &= \frac{2AC+B^2}{6},\\
E &= \frac{2AD+2BC}{8},\\
F &= \frac{2AE+2BD+C^2}{10},\\
G &= \frac{2AF+2BE+2CD}{12},\\
B &= \frac{2AG+2BF+2CE+D^2}{14}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Und daher werden vollkommen dieselben Bestimmungen der Buchstaben A, B, C, D etc. hervorgehen, welche das andere oben in § 10 angegebene Gesetz an die Hand gibt.

§12 Weil die Nenner der Brüche, denen die Buchstaben A, B, C, D etc. gleich gefunden worden sind, hinreichend regelmäßig fortschreiten, kann daher eine eigene Regel, um die Zähler zu finden, aufgefunden werden. Wir wollen nämlich festlegen

$$A = \alpha, \qquad F = \frac{\zeta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\beta}{1}, & G &= \frac{\eta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6},\\
C &= \frac{\gamma}{1\cdot 2}, & H &= \frac{\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7},\\
D &= \frac{\delta}{1\cdot 2\cdot 3}, & I &= \frac{\iota}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8},\\
E &= \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, & K &= \frac{\varkappa}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9}
\end{aligned}
$$

etc.

und das Gesetz wird nach den Einsetzungen dieses sein:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1,\\
\beta &= \frac{\alpha^2+1}{2},\\
\gamma &= \alpha\beta,\\
\delta &= \alpha\gamma+\beta^2,\\
\varepsilon &= \alpha\delta+3\beta\gamma,\\
\zeta &= \alpha\varepsilon+4\beta\delta \;+3\gamma^2,\\
\eta &= \alpha\zeta+5\beta\varepsilon \;+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\gamma\delta,\\
\theta &= \alpha\eta+6\beta\zeta \;+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\gamma\varepsilon \;+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\delta^2}{2},\\
\iota &= \alpha\theta+7\beta\eta \;+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\gamma\zeta \;+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\delta\varepsilon,\\
\varkappa &= \alpha\iota+8\beta\theta \;+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\gamma\varepsilon \;+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\delta\zeta+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}
\end{aligned}
$$

etc.

Dieses Bildungsgesetz ist klar, wenn nur angemerkt wird, sooft der letzte

Term ein Quadrat ist, dass er darüber hinaus durch zwei geteilt wird.

§13 Wir wollen nun diese Reihe betrachten

$$Az + Bz^2 + C^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.},$$

deren Summe bekannt ist, diese zu sein

$$= \frac{z\cos z}{1-\sin z},$$

und man setze

$$z = \frac{p\pi}{2};$$

es wird sein

$$\frac{p\pi\cos\frac{p\pi}{2}}{2-2\sin\frac{p\pi}{2}} = \frac{A\pi}{2^2}\cdot 2p + \frac{B\pi^2}{2^3}\cdot 2p^2 + \frac{C\pi^3}{2^4}\cdot 2p^3 + \frac{D\pi^4}{2^5}\cdot 2p^4 + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi\cos\frac{p\pi}{2}}{4-4\sin\frac{p\pi}{2}} = \frac{A\pi}{2^2} + \frac{pB\pi^2}{2^3} + \frac{p^2C\pi^3}{2^4} + \frac{p^3D\pi^4}{2^5} + \text{etc.}$$

Wenn daher also anstelle der einzelnen Terme die Reihen aus § 10 eingesetzt werden, wird hervorgehen

$$\frac{\pi\cos\frac{p\pi}{2}}{4-4\sin\frac{p\pi}{2}} = \begin{array}{llllll} +1 & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & +\frac{1}{9} & -\text{etc.} \\ +p & +\frac{p}{3^2} & +\frac{p}{5^2} & +\frac{p}{7^2} & +\frac{p}{9^2} & +\text{etc.} \\ +p^2 & -\frac{p^2}{3^3} & +\frac{p^2}{5^3} & -\frac{p^2}{7^3} & +\frac{p^2}{9^3} & -\text{etc.} \\ +p^3 & +\frac{p^3}{3^4} & +\frac{p^3}{5^4} & +\frac{p^3}{7^4} & +\frac{p^3}{9^4} & +\text{etc.} \\ & \text{etc.} & & & & \end{array}$$

Aber all diese Reihe gehen spaltenweise summiert in diese über

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{3+p} + \frac{1}{5-p} - \frac{1}{7+p} + \frac{1}{9-p} - \text{etc.}$$

deren Summe daher diese ist

$$\frac{\pi\cos\frac{p\pi}{2}}{4-4\sin\frac{p\pi}{2}}.$$

§14 Es wird möglich sein, mehrere summierbare Reihen dieses Geschlechts aus der am Ende von § 9 dargestellten Reihe zu derivieren. Wir wollen $a = b = m$ setzen und werden diese haben

$$\frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} + \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} + \frac{2m}{25n^2-m^2} - \text{etc.},$$

deren Summe sein wird

$$= \frac{\pi}{n \sin \dfrac{m\pi}{n}} - \frac{1}{m}$$

- wegen $\cos 0\pi = 1$ und $\sin 0\pi = 0$. Deswegen wird man, wenn durch $2m$ dividiert wird, haben

$$\frac{1}{n^2 - m^2} - \frac{1}{4n^2 - m^2} + \frac{1}{9n^2 - m^2} - \frac{1}{16n^2 - m^2} + \frac{1}{25n^2 - m^2} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2mn \sin \dfrac{m\pi}{n}} - \frac{1}{2mm}.$$

Wir wollen weiter $a = -m$ und $b = +m$ setzen und es wird hervorgehen

$$-\frac{\pi \cos \dfrac{m\pi}{n}}{n \sin \dfrac{m\pi}{n}} + \frac{1}{m}$$
$$= \frac{2m}{n^2 - m^2} + \frac{2m}{4n^2 - m^2} + \frac{2m}{9n^2 - m^2} + \frac{2m}{16n^2 - m^2} + \frac{2m}{25n^2 - m^2} + \text{etc.}$$

Sooft es deshalb passiert, dass $\cos \frac{m\pi}{n}$ verschwindet, sooft wird die Summe algebraisch angebbar sein, natürlich $= \frac{1}{2m^2}$. Dies geschieht aber, wenn $\frac{m}{n} = \frac{2i+1}{2}$ oder $m = 2i + 1$ und $n = 2$ war, woher sein wird

$$\frac{1}{2(2i+1)^2} = \frac{1}{4 - (2i+1)^2} + \frac{1}{16 - (2i+1)^2} + \frac{1}{36 - (2i+1)^2} + \frac{1}{64 - (2i+1)^2} + \text{etc.}$$

Daher entspringt die folgende paradoxe Proposition, natürlich, dass gilt

$$\frac{1}{4-p}+\frac{1}{16-p}+\frac{1}{36-p}+\frac{1}{64-p}+\frac{1}{100-p}+\text{etc.}=\frac{1}{2p},$$

sooft p eine ungerade Quadratzahl war.

§15 Wir wollen $n=1$ und $m^2=p$ setzen; es wird sein

$$\frac{1}{1-p}-\frac{1}{4-p}+\frac{1}{9-p}-\frac{1}{16-p}+\frac{1}{25-p}-\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{p}}{2p\sin\pi\sqrt{p}}-\frac{1}{2p},$$

$$\frac{1}{1-p}+\frac{1}{4-p}+\frac{1}{9-p}+\frac{1}{16-p}+\frac{1}{25-p}+\text{etc.}=\frac{1}{2p}-\frac{\pi\sqrt{p}\cos\pi\sqrt{p}}{2p\sin\pi\sqrt{p}};$$

wenn diese Reihen addiert werden, folgt, dass gelten wird

$$\frac{1}{1-p}+\frac{1}{-p}+\frac{1}{25-p}+\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{p}\text{ versin }\pi\sqrt{p}}{4p\sin\pi\sqrt{p}};$$

aber wenn dieselben voneinander subtrahiert werden, wird sein

$$\frac{1}{4-p}+\frac{1}{16-p}+\frac{1}{36-p}+\text{etc.}=\frac{1}{2p}-\frac{\pi\sqrt{p}(1+\cos\pi\sqrt{p})}{4p\sin\pi\sqrt{p}}.$$

Aber es ist

$$\frac{\text{versin }\pi\sqrt{p}}{\sin\pi\sqrt{p}}=\tan\frac{\pi\sqrt{p}}{2}\quad\text{und}\quad\frac{1+\cos\pi\sqrt{p}}{\sin\pi\sqrt{p}}=\cot\frac{\pi\sqrt{p}}{2},$$

woher die letzten Summen vereinfacht werden werden.

§16 Wir können deshalb daraus die folgenden Reihen summieren

$$\frac{1}{1-p} \pm \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} \pm \frac{1}{16-p} + \text{etc.},$$

wenn freilich p irgendeine positive Zahl bezeichnet. Aber wenn anstelle von p eine negative Zahl eingesetzt wird, beispielsweise $-q$, dann werden so Sinus und Kosinus wie die Bogen $\pi\sqrt{p}$ oder $\pi\sqrt{-q}$ selbst imaginäre Größen. Weil aber die Summen der Reihen nichtsdestoweniger reell und endlich werden, werden sich die imaginären Größen gegenseitig aufheben. Deswegen wird es passend sein zu untersuchen, reelle Größen von welcher Art in diesen Formen

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin\pi\sqrt{-q}} \quad \text{und} \quad \frac{\pi\sqrt{-q}}{\tan\pi\sqrt{-q}}$$

enthalten sind. Dafür wollen wir festlegen

$$u = \frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin\pi\sqrt{-q}}$$

und es wird sein

$$\sin\pi\sqrt{-q} = \frac{\pi\sqrt{-q}}{u} \quad \text{und} \quad \pi\sqrt{-q} = \arcsin\frac{\pi\sqrt{-q}}{u};$$

es werden die Differentiale genommen, nachdem π und u variabel festgelegt worden sind; man wird haben

$$d\pi = \frac{ud\pi - \pi du}{u\sqrt{uu + q\pi^2}}.$$

Es werde $u = \pi v$ gesetzt; es wird hervorgehen

$$d\pi = \frac{-dv}{v\sqrt{q+vv}} \quad \text{und} \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{q}} \log \frac{\sqrt{q}+\sqrt{q+vv}}{cv}.$$

Daher wird sein

$$e^{\pi\sqrt{p}}cv = \sqrt{q} + \sqrt{q+vv} \quad \text{und} \quad v = \frac{2e^{\pi\sqrt{q}}c\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}-1}$$

und

$$u = \frac{2\pi e^{\pi\sqrt{q}}c\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}c^2-1}.$$

Aber die Konstante c muss so beschaffen sein, dass nach Setzen von $\pi = 0$ $u = 1$ wird, woher $c = 1$ wird. Deswegen wird sein

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\sin \pi\sqrt{-q}} = \frac{2e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}}-1}.$$

Auf die gleiche Weise werde festgelegt

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\tan \pi\sqrt{-q}} = \frac{\pi}{v};$$

es wird sein

$$v\sqrt{-v} = \tan \pi\sqrt{-q} \quad \text{und} \quad \pi\sqrt{-q} = \arctan v\sqrt{-q}$$

und durch Differenzieren

$$d\pi = \frac{dv}{1-qvv}.$$

es werde erneut integriert; es wird sein

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{q}} \log \frac{1+v\sqrt{q}}{1-v\sqrt{q}} \quad \text{und} e^{2\pi\sqrt{q}} - e^{2\pi\sqrt{q}} v\sqrt{q} = 1 + v\sqrt{q},$$

woher wird

$$v = \frac{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\sqrt{q}}$$

sowie

$$\frac{\pi\sqrt{-q}}{\tan \pi\sqrt{-q}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{q}} + 1)\pi\sqrt{q}}{e^{2\pi\sqrt{q}} - 1}.$$

§17 Wir haben also die folgenden acht Reihen erhalten, deren Summen angegeben werden können, welche wir noch einmal übersichtlicher und gesammelt darstellen wollen

$$\frac{1}{1-p} - \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} - \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} - \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \sin \pi\sqrt{p}} - \frac{1}{2p},$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p \tan \pi\sqrt{p}},$$

$$\frac{1}{1-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{25-p} + \frac{1}{49-p} + \frac{1}{81-p} + \text{etc.} = \frac{\pi\sqrt{p}}{4p \cot \frac{\pi\sqrt{p}}{2}},$$

$$\frac{1}{4-p}+\frac{1}{16-p}+\frac{1}{36-p}+\frac{1}{64-p}+\frac{1}{100-p}+\text{etc.}=\frac{1}{2p}-\frac{\pi\sqrt{p}}{4p\tan\frac{\pi\sqrt{p}}{2}},$$

$$\frac{1}{1+q}-\frac{1}{4+q}+\frac{1}{9+q}-\frac{1}{16+q}+\frac{1}{25+q}-\text{etc.}=\frac{1}{2q}-\frac{e^{\pi\sqrt{q}}\pi\sqrt{q}}{(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)q},$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{1}{4+q}+\frac{1}{9+q}+\frac{1}{16+q}+\frac{1}{25+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{2\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{2(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)q}-\frac{1}{2q},$$

$$\frac{1}{1+q}+\frac{1}{9+q}+\frac{1}{25+q}+\frac{1}{49+q}+\frac{1}{81+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\pi\sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}}+1)q},$$

$$\frac{1}{4+q}+\frac{1}{16+q}+\frac{1}{36+q}+\frac{1}{64+q}+\frac{1}{100+q}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{q}}+1)\pi\sqrt{q}}{4(e^{\pi\sqrt{q}}-1)q}-\frac{1}{2q}.$$

§18 Nachdem ich oben das Gesetz dargeboten habe, nach welchem die Summen aller Potenzen der Terme dieser Reihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}$$

fortschreiten, werde ich nun das Gesetz ausfindig machen, welchem nur die ungeraden Potenzen folgen, damit diese Summen ohne Kenntnis der geraden, so weit wie es beliebt, fortgesetzt werden können; es sei deshalb

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}=A\pi,$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{etc.}=B\pi^3,$$

$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\text{etc.}=C\pi^5,$$

$$1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-\text{etc.}=D\pi^7,$$

$$1-\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}-\frac{1}{7^9}+\frac{1}{9^9}-\text{etc.}=E\pi^9$$

$$\text{etc.}$$

und es wird das Gesetz ausfindig zu machen sein, nach welchem die Koeffizienten A, B, C, D etc. fortschreiten. Für dieses Ziel betrachte ich diese Reihe

$$A\pi z+B\pi^3z^3+C\pi^5z^5+D\pi^7z^7+\text{etc.},$$

deren Summe $= s$ sei; es wird also, nachdem diese Reihen respektive mit den entsprechenden Potenzen von z multipliziert worden sind, sein

$$s=\frac{z}{1-zz}-\frac{3z}{9-zz}+\frac{5z}{25-zz}-\frac{7z}{49-zz}+\text{etc.}$$

und

$$\frac{2s}{z}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}-\frac{1}{3-z}-\frac{1}{3+z}+\frac{1}{5-z}+\frac{1}{5+z}-\text{etc.}$$

Weil aber aus § 9 gilt

$$\frac{\pi\cos\dfrac{(b-a)\pi}{2n}}{n\sin\dfrac{(b+a)\pi}{2n}-n\sin\dfrac{(b-a)\pi}{2n}}$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{n-b}-\frac{1}{n+b}-\frac{1}{2n-a}+\frac{1}{2n+a}+\frac{1}{3n-b}-\frac{1}{3n+b}-\text{etc.},$$

werde

$$a = 1 - z, \quad n = 2 \quad \text{und} \quad b = 1 - z,$$

und diese Reihe wird in jene übergehen; daraus wird hervorgehen

$$\frac{2s}{z} = \frac{\pi}{2\sin\dfrac{(1-z)\pi}{2}} \quad \text{und} \quad s = \frac{\pi z}{4\sin\dfrac{(1-z)\pi}{2}}$$

oder

$$s = \frac{\pi z}{4\cos\dfrac{\pi z}{2}} = \frac{\dfrac{\pi z}{4}}{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{1\cdot 2\cdot 2^2} + \dfrac{\pi^4 z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4} - \dfrac{\pi^6 z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^2} + \text{etc.}};$$

weil dieser Bruch, wenn tatsächlich dividiert wird, wieder die tatsächlich angenommene Reihe selbst, also

$$A\pi z + B\pi^3 z^3 + C\pi^5 z^5 + \text{etc.},$$

ergeben muss, wird gelten

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}, \\
B &= \frac{A}{2\cdot 4}, \\
C &= \frac{B}{2\cdot 4} - \frac{A}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \\
D &= \frac{C}{2\cdot 4} - \frac{B}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{A}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}, \\
E &= \frac{D}{2\cdot 4} - \frac{C}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{B}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} - \frac{A}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 16}
\end{aligned}$$

etc.

§19 Oder wenn festgelegt wird

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{A\pi}{2^2},$$
$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\text{etc.}=\frac{B\pi^3}{2^4},$$
$$1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\text{etc.}=\frac{C\pi^5}{2^6},$$
$$1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\text{etc.}=\frac{D\pi^7}{2^8}$$

etc.,

werden die Koeffizienten diesem Bidungsgesetz folgen

$$A=1,$$
$$B=\frac{A}{1\cdot 2},$$
$$C=\frac{B}{1\cdot 2}-\frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$
$$D=\frac{C}{1\cdot 2}-\frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{A}{1\cdot 2\cdots 6},$$
$$E=\frac{D}{1\cdot 2}-\frac{C}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{B}{1\cdot 2\cdots 6}-\frac{A}{1\cdot 2\cdots 8}$$

etc.

Wenn daher aber jene Reihen rückwärts fortgesetzt werden, dass zu positiven

Potenzen gelangt wird, werden die Summen all jener Reihen $= 0$ sein; so dass, auch wenn wir in diesen Formeln weiter fortschritten, dennoch keine anderen Werte hervorgingen. Es ist natürlich

$$\begin{aligned}
&1 - 3 \;\, + 5 \;\, - 7 \;\, + 9 \;\, - \text{etc.} = 0,\\
&1 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + 9^3 - \text{etc.} = 0,\\
&1 - 3^5 + 5^5 - 7^5 + 9^5 - \text{etc.} = 0,\\
&1 - 3^7 + 5^7 - 7^7 + 9^7 - \text{etc.} = 0
\end{aligned}$$

etc.

§20 So wie aber die Summen der ungeraden Potenzen ein eigenes Fortschreitungsgesetz befolgen, so erfreuen sich auch die geraden Potenzen der gleichen Eigenschaft, dass sie alle aus sich selbst ohne Hilfe der ungeraden Potenzen bestimmt werden können. Um deren Gesetz zu finden, wollen wir die gleiche Operation gebrauchen. Es sei also

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.} &= A\pi^2,\\
1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.} &= B\pi^4,\\
1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.} &= C\pi^6,\\
1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{etc.} &= D\pi^8
\end{aligned}$$

etc.

und es werde die Summe dieser Reihe ausfindig gemacht

$$A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.} = s;$$

es wird sein

$$s = \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^2}{9-z^2} + \frac{z^2}{25-z^2} + \frac{z^2}{49-z^2} + \text{etc.},$$

woher § 17 werden wird

$$s = \frac{\pi z}{4\cot\frac{\pi z}{2}}$$

oder durch eine Reihe

$$s = \frac{\frac{\pi^2 z^2}{1\cdot 2^3} - \frac{\pi^4 z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^5} + \frac{\pi^6 z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^7} - \text{etc.}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1\cdot 2\cdot 2^2} + \frac{\pi^4 z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4} - \frac{\pi^6 z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^6} + \text{etc.}};$$

weil aus dieser Division die angenommene Reihe selbst entspringen muss, wird sein

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{8},\\
B &= \frac{A}{2\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4},\\
C &= \frac{B}{2\cdot 4} - \frac{A}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 4},\\
D &= \frac{C}{2\cdot 4} - \frac{B}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 12} - \frac{1}{2\cdot 4\cdots 14\cdot 4}
\end{aligned}$$

etc.

§21 Das Bildungsgesetz wird leichter erkannt werden, wenn festgelegt wird

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{etc.} &= A\frac{\pi^2}{2^3},\\
1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{etc.} &= B\frac{\pi^4}{2^5},\\
1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{etc.} &= C\frac{\pi^6}{2^7},\\
1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{etc.} &= D\frac{\pi^8}{2^9}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hier werden nämlich die Koeffizienten A, B, C etc. nach der folgenden Progression fortschreiten

$$\begin{aligned}
A &= 1,\\
B &= \frac{A}{1\cdot 2},\\
C &= \frac{B}{1\cdot 2}-\frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
D &= \frac{C}{1\cdot 2}-\frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\frac{1}{1\cdot 2\cdots 7}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Wenn daher also diese Reihe angesetzt wird

$$s = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{etc.},$$

wird sein

$$s = \frac{z - \dfrac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dfrac{z^7}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{etc.}}{1 - \dfrac{z^2}{1\cdot 2} + \dfrac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} + \text{etc.}}$$

und daher

$$s = \tan z \quad \text{oder} \quad z = \arctan s.$$

Wir werden also haben

$$dz = \frac{ds}{1+ss} \quad \text{und} \quad dz + ssdz = ds;$$

weil dieser Gleichung dieser Wert Genüge leisten muss

$$s = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + Ez^9 + \text{etc.},$$

werden die Werte anstelle von ds und ss eingesetzt und es wird sein

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dz} &= A + 3Bz^2 + 5C\ \ z^4 + 7D\ \ z^6 + 9E\ \ \ z^8 + \text{etc.},\\
ss &= \quad + A^2z^2 + 2ABz^4 + 2ACz^6 + 2ADz^8 + \text{etc.},\\
&\qquad\qquad\qquad\quad + B^2\ \ z^6 + 2BC\, z^8\\
1 &= 1.
\end{aligned}$$

Daher werden deshalb nach Bilden der Gleichung die folgenden anderen

Bestimmungen der Buchstaben A, B, C, D etc. hervorgehen:

$$\begin{aligned}
A &= 1, \\
B &= \frac{A^2}{3}, \\
C &= \frac{2AB}{5}, \\
D &= \frac{2AC + B^2}{7}, \\
E &= \frac{2AD + 2BC}{9}, \\
F &= \frac{2AE + 2BD + C^2}{11} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

§22 Von diesen Reihen der geraden Potenzen hängen die Summen der in dieser allgemeinen Form enthaltenen Reihen ab

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.},$$

während n eine gerade Zahl bezeichnet. Wenn daher nämlich galt

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.} = N\pi^n,$$

wird sein

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.} = \frac{2^n N\pi^n}{2^n - 1},$$

woher die Summen all dieser Reihen, solange n eine gerade Zahl ist, durch die Quadratur des Kreises und aus den schon gefundenen Summen der gleichen geraden Potenzen für die ungeraden Zahlen allein gefunden werden können. Aber damit diese Summe direkt gefunden werden können, wollen wir nach einem eigenen Gesetz, nach welchem diese Summen fortschreiten, suchen. Es sei deshalb

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = A\pi^2,$$
$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = B\pi^4,$$
$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = C\pi^6,$$
$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = D\pi^8$$
$$\text{etc.}$$

und wir wollen diese Reihe betrachten

$$s = A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + E\pi^{10} z^{10} + \text{etc.},$$

die, nachdem anstelle von $A\pi^2$, $B\pi^4$, $C\pi^6$ etc. die Reihen eingesetzt worden sind, welche sie bezeichnen, und danach die homologen Terme addiert worden sind, hervorgehen wird als

$$s = \frac{zz}{1 - zz} + \frac{zz}{4 - zz} + \frac{zz}{9 - zz} + \frac{zz}{16 - zz} + \frac{zz}{25 - zz} + \text{etc.},$$

welche Reihe durch § 17 summiert gibt

$$s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2 \tan \pi z}$$

oder, wenn der Tangens des Bogens πz durch eine Reihe ausgedrückt wird,

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2} + \dfrac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dfrac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}}{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dfrac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{\dfrac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dfrac{2\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dfrac{3\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdots 7} - \dfrac{4\pi^8 z^8}{1 \cdot 2 \cdots 9}}{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{\pi^4 z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dfrac{\pi^6 z^6}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \dfrac{\pi^8 z^8}{1 \cdot 2 \cdots 9} - \text{etc.}};$$

weil dieser Ausdruck entwickelt die angenommene Reihe selbst

$$A\pi^2 z^2 + B\pi^4 z^4 + C\pi^6 z^6 + D\pi^8 z^8 + \text{etc.}$$

liefern muss, werden diese Bestimmungen der Koeffizienten folgen:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{6}, \\
B &= \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\
C &= \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdots 7}, \\
D &= \frac{C}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdots 7} - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdots 9}
\end{aligned}$$

etc.

§23 Aber für diese selben Koeffizienten kann ein anderes Fortschreitungsgesetz dargeboten werden, mit dessen Hilfe es möglich sein wird, sie um Vieles bequemer aufzufinden. Weil nämlich gilt

$$s = \frac{1}{2} - \frac{\pi z}{2\tan \pi z},$$

wird sein

$$\tan \pi z = \frac{\pi z}{1-2s} \quad \text{und} \quad \pi z = \arctan \frac{\pi z}{1-2s}.$$

es werde $\pi z = u$ gesetzt; es wird sein

$$u = \arctan \frac{u}{1-2s}$$

und durch Differenzieren

$$du = \frac{du - 2sdu + 2uds}{1 - 4s + 4ss + uu}$$

oder

$$uudu + 4ssdu = 2sdu + 2uds,$$

welcher Gleichung dieser Wert Genüge leistet

$$s = Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + Eu^{10} + \text{etc.},$$

nach Einsetzen von welchem werden wird

$$
\begin{aligned}
uu &= uu,\\
4ss &= \qquad + 4A^2u^4 + 8ABu^6 + 8ACu^8 + 8ADu^{10} + 8AEu^{12} + \text{etc.},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 4B^2\ u^8 + 8BC\ u^{10} + 8BDu^{12}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 4C^2\ u^{12}\\
2s &= 2Au^2 + 2B\ \ u^4 + 2C\ \ u^6 + 2D\ \ u^8 + 2E\ \ u^{10} + 2F\ \ u^{12} + \text{etc.},\\
\frac{2uds}{du} &= 4Au^2 + 8B\ \ u^4 + 12C\,u^6 + 16D\,u^8 + 20E\ \ u^{10} + 24F\ u^{12} + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

woher die folgenden Bestimmungen erlangt werden:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{6},\\
B &= \frac{2A^2}{5},\\
C &= \frac{4AB}{7},\\
D &= \frac{4AC + 2B^2}{9},\\
E &= \frac{4AD + 4BC}{11},\\
F &= \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13},\\
G &= \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15},\\
A &= \frac{4AG + 4BF + 4CE + 2D^2}{17}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§24 Aber die Summen der Reihen von dieser Art, bis wohin ich sie freilich an die Hand gegeben habe, sind die folgenden:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2,$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}=\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6}\pi^4,$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.}=\frac{2^5}{1\cdot 2\cdots 7}\cdot\frac{1}{6}\pi^6,$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{etc.}=\frac{2^7}{1\cdot 2\cdots 9}\cdot\frac{3}{10}\pi^8,$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{etc.}=\frac{2^9}{1\cdot 2\cdots 11}\cdot\frac{5}{6}\pi^{10},$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{etc.}=\frac{2^{11}}{1\cdot 2\cdots 13}\cdot\frac{691}{210}\pi^{12},$$
$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\text{etc.}=\frac{2^{13}}{1\cdot 2\cdots 15}\cdot\frac{35}{2}\pi^{14},$$
$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\text{etc.}=\frac{2^{15}}{1\cdot 2\cdots 17}\cdot\frac{3617}{30}\pi^{16},$$
$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\text{etc.}=\frac{2^{17}}{1\cdot 2\cdots 19}\cdot\frac{43867}{42}\pi^{18},$$
$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\text{etc.}=\frac{2^{19}}{1\cdot 2\cdots 21}\cdot\frac{1222277}{110}\pi^{20},$$
$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\text{etc.}=\frac{2^{21}}{1\cdot 2\cdots 23}\cdot\frac{854513}{6}\pi^{22},$$
$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\text{etc.}=\frac{2^{23}}{1\cdot 2\cdots 25}\cdot\frac{1181820455}{546}\pi^{24}.$$

In diesen Ausdrücken ist nur das Bildungsgesetz der mittleren Brüche nicht offenbar, die übrigen Teile schreiten hingegen in klarer Weise fort. Nachdem ich aber diese mittleren Brüche

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{5}{6} \quad \text{etc.}$$

aufmerksamer betrachtet hatte, habe ich entdeckt, dass sie im allgemeinen Ausdruck auftauchen, den ich einst für die aus einem gegebenen allgemeinen Term zu findende Summe irgendeiner Reihe angegeben habe, so dass der eine mit Hilfe des anderen Ausdruckes beschrieben werden kann.

§25 Es wird also der Mühe wert sein, die Übereinstimmung dieser zwei voneinander dermaßen verschiedenen Ausdrücke sorgfältiger zu untersuchen. Der eine Ausdruck, welchen ich für die Summation von Reihen gegeben habe, verhält sich so: Wenn der allgemeine Term irgendeiner Reihe oder der, der dem unbestimmten numerischen Exponenten x entspricht, $= X$ war und die Summe der Reihe vom ersten Term bis hin zu diesem X einschließlich $= S$ gesetzt wird, wird gelten

$$\begin{aligned} S = \int X dx + \frac{X}{1 \cdot 2} &+ \frac{dX}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2dx} - \frac{d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6dx^3} \\ &+ \frac{d^5X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6dx^5} - \frac{d^7X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 6dx^7} \\ &+ \frac{5d^9X}{1 \cdot 2 \cdots 11dx^9} - \frac{691d^{11}X}{1 \cdot 2 \cdots 13 \cdot 210dx^{11}} \\ &+ \frac{35d^{13}X}{1 \cdot 2 \cdots 15 \cdot 2dx^{13}} - \frac{3617d^{15}X}{1 \cdot 2 \cdots 17 \cdot 30dx^{15}} \\ &+ \frac{43867d^{17}X}{1 \cdot 2 \cdots 19 \cdot 42dx^{17}} - \frac{1222277d^{19}X}{1 \cdot 2 \cdots 21 \cdot 110dx^{19}} \\ &+ \frac{854513d^{21}X}{1 \cdot 2 \cdots 23 \cdot 6dx^{21}} - \frac{1181820455d^{23}X}{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 546dx^{23}} \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

in welchem Ausdruck es klar wird, dass ganz und gar dieselben unregelmäßigen Brüche

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{5}{6} \quad \text{etc.}$$

enthalten sind, welche zuvor in den Ausdrücken der Summen aufgetaucht sind, nur mit diesem Unterschied, dass sie hier alternierende Vorzeichen haben, wohingegen dort alle mit dem Vorzeichen $+$ behaftet waren. Und diese Übereinstimmung hat mir den Nutzen verschafft, dass ich diesen allgemeinen Ausdruck der Summe S bis dahin habe fortsetzen können, während ich dies durch das Gesetz, welches ich zur damaligen Zeit für die Progression gefunden hatte, nicht ohne um Vieles größere Arbeit hätte leisten können.

§26 Obgleich aber lediglich diese Beobachtung einer so großen Übereinstimmung genügen könnte, um die Übereinstimmung in den folgenden Termen, die noch nicht bekannt sind, darzutun, wird es dennoch besser sein, dieselbe Übereinkunft aus der Natur der Sache selbst zu finden, damit eingesehen wird, dass sie nicht zufällig sondern notwendigerweise aufgetreten ist. Diesen letzten Ausdruck habe ich hingegen auf die folgende Weise erlangt. Weil S die Summe so vieler Terme in irgendeiner Reihe bezeichnet, wie Einheiten im Exponenten x enthalten sind, und der letzte dieser Terme $= X$ ist, ist es offenbar, wenn in S $x-1$ anstelle von x gesetzt wird, dass dann dieselbe Summe S um den letzten Term vermindert oder $S - X$ hervorgeht. Aber nach Setzen von $x-1$ anstelle von x wird die Größe S in diese übergehen

$$S - \frac{dS}{1dx} + \frac{ddS}{1 \cdot 2dx^2} - \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} - \text{etc.},$$

welche deshalb $S - X$ gleich ist; daher hat man diese Gleichung

$$X = \frac{dS}{1dx} - \frac{ddS}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{d^3S}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} - \frac{d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} + \text{etc.}$$

Um nun aus dieser Gleichung S in X auszudrücken, nehme ich diese Gleichung an

$$S = \int X dx + \alpha X + \frac{\beta dX}{dx} + \frac{\gamma ddX}{dx^2} + \frac{\delta d^3X}{dx^3} + \text{etc.},$$

nach Einsetzen von welcher in jener man haben wird

$$\begin{aligned}
X = X + \frac{\alpha dX}{dx} &+ \frac{\beta ddX}{dx^2} &&+ \frac{\gamma d^3X}{dx^3} &&+ \frac{\delta d^4X}{dx^4} + \text{etc.} \\
- \frac{dX}{1\cdot 2dx} &- \frac{\alpha ddX}{1\cdot 2dx^2} &&- \frac{\beta d^3X}{1\cdot 2dx^3} &&- \frac{\gamma d^4X}{1\cdot 2dx^4} \\
&+ \frac{ddX}{1\cdot 2\cdot 3dx^2} &&+ \frac{\alpha d^3X}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} &&+ \frac{\beta d^4X}{1\cdot 2\cdot 3dx^4} \\
& &&- \frac{d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^3} &&- \frac{\alpha d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4dx^4} \\
& && &&+ \frac{d^4X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5dx^4}
\end{aligned}$$

§27 Aus dieser Gleichheit entsprießen die folgenden Bestimmungen der Koeffizienten α, β, γ, δ etc.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{1\cdot 2}, \\
\beta &= \frac{\alpha}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \\
\gamma &= \frac{\beta}{1\cdot 2} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \\
\delta &= \frac{\gamma}{1\cdot 2} - \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdots 5}, \\
\varepsilon &= \frac{\delta}{1\cdot 2} - \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdots 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 6}
\end{aligned}$$

etc.

und aus diesen Formeln habe ich zur damaligen Zeit die Werte dieser Buchstaben bestimmt, und das mit um Vieles mehr Arbeit. Auch habe ich, was hier passiert, nicht anders als durch Beobachtung allein erkannt, dass alle zweiten Werte ab dem dritten γ, ε, η etc. verschwinden. Aber aus den nun aufgestellten Prinzipien wird dasselbe in glänzender Weise gezeigt werden können, wenn ein anderes Fortschreitungsgesetz ausfindig gemacht wird. Ich betrachte dafür diese Reihe

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

und es wird aus dem dem vorhergehenden Bildungsgesetz der Koeffizienten sein

$$s = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1\cdot 2} + \cfrac{zz}{1\cdot 2\cdot 3} - \cfrac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cfrac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{etc.}},$$

welche Gleichung in diese übergeht

$$s = \frac{z}{1 - e^{-z}} \quad \text{oder} \quad s = \frac{e^z z}{e^z - 1}.$$

Daher entspringt

$$e^z s - a = e^z z \quad \text{und} \quad e^z = \frac{s}{s - z} \quad \text{sowie} z = \log s - \log(s - z).$$

Durch Differenzieren wird man aber haben

$$dz = \frac{ds}{s} - \frac{ds - dz}{s - z}$$

oder

$$ssdz - szdz = sdz - zds,$$

welcher Gleichung der angenommene Wert Genüge leisten muss

$$s = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.};$$

deshalb werde dieser Wert in dieser Gleichung eingesetzt

$$\frac{zds}{dz} - s - sz + ss = 0$$

und es wird erhalten werden

$$\begin{array}{rcllllll}
\frac{zds}{dz} & = & & +\alpha\ z & +2\beta z^2 & +3\gamma\ z^3 & +4\delta\ z^4 & +5\varepsilon\ z^5 + \text{etc.}, \\
-s & = & -1 & +\alpha\ z & -\beta\ z^2 & -\gamma\ z^3 & -\delta\ z^4 & -\varepsilon\ z^5 - \text{etc.}, \\
-sz & = & & -\ z & -\alpha\ z^2 & -\beta\ z^3 & -\gamma\ z^4 & -\delta\ z^5 - \text{etc.}, \\
+s^2 & = & 1 & +2\alpha z & +2\beta z^2 & +2\gamma\ z^3 & +2\delta\ z^4 & +2\varepsilon\ z^5 + \text{etc.} \\
 & & & & +\alpha^2 & +2\alpha\beta & +2\alpha\gamma & +2\alpha\delta \\
 & & & & & & +\beta^2 & +2\beta\gamma
\end{array}$$

Daher wird also erschlossen, dass gelten wird

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha^2}{3},$$

$$\gamma = \frac{\beta - 2\alpha\beta}{4},$$

$$\delta = \frac{\gamma - 2\alpha\gamma - \beta\beta}{5},$$

$$\varepsilon = \frac{\delta - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma}{6},$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon - 2\alpha\varepsilon - 2\beta\delta - \gamma\gamma}{7},$$

$$\eta = \frac{\zeta - 2\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8}$$

etc.

§28 Weil also $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, wird $1 - 2\alpha = 0$ sein; weil dieser Wert in allen folgenden Termen auftaucht, wird sein

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{12},$$

$$\gamma = 0,$$

$$\delta = -\frac{\beta\beta}{5},$$

$$\varepsilon = -\frac{2\beta\gamma}{6},$$

$$\zeta = \frac{-2\beta\delta - \gamma\gamma}{7},$$

$$\eta = \frac{-2\beta\varepsilon - 2\gamma\delta}{8},$$

$$\theta = \frac{-2\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon - \delta\delta}{9},$$

$$\iota = \frac{-2\beta\eta - 2\gamma\zeta - 2\delta\varepsilon}{10}$$

etc.

Weil nun $\gamma = 0$ ist, ist es klar, dass auch $\varepsilon = 0$ und daher weiter $\eta = 0$, $\iota = 0$ etc. sein wird, so dass alle zweiten Terme von γ an $= 0$ sind, was aus dem vorhergehenden Gesetz nur durch Beobachtungen klar zu tage trat, nun hingegen wird es eingesehen notwendig passieren zu müssen. Daher wird es also, während $\alpha = \frac{1}{2}$ bleibt, wie folgt sein

$$\beta = \frac{1}{12},$$

$$\delta = -\frac{\beta^2}{5},$$

$$\zeta = -\frac{2\beta\delta}{7},$$

$$\theta = \frac{2\beta\zeta - 2\delta\delta}{9},$$

$$\varkappa = \frac{-2\beta\theta - 2\delta\zeta}{11}$$

etc.

Wenn daher also festgelegt wird

$$\beta = \frac{A}{2}, \quad \delta = -\frac{B}{2^3}, \quad \zeta = \frac{C}{2^5}, \quad -\theta = -\frac{D}{2^7}, \quad \varkappa = \frac{E}{2^9} \quad \text{etc.},$$

so dass ist

$$S = \int X dx = \frac{X}{2} + \frac{AdX}{2dx} - \frac{Bd^3X}{2^3dx^3} + \frac{Cd^5X}{2^5dx^5} - \frac{Dd^7X}{2^7dx^7} + \frac{Ed^9X}{2^9dx^9} - \frac{Fd^{11}X}{2^{11}dx^{11}} + \text{etc.},$$

werden die Koeffizienten A, B, C, D etc. dieses Gesetz befolgen

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{6}, \\
B &= \frac{2A^2}{5}, \\
C &= \frac{4AB}{7}, \\
D &= \frac{4AC + 2B^2}{9}, \\
E &= \frac{4AD + 4BC}{11}, \\
F &= \frac{4AE + 4BD + 2C^2}{13}, \\
G &= \frac{4AF + 4BE + 4CD}{15} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Also erhalten die Buchstaben A, B, C, D etc. die Werte selbst, welche wir ihnen oben in § 22 und 23 zugeteilt haben. Und daher sind wir bezüglich der Übereinstimmung der Koeffizienten in diesen im höchsten Maße verschiedenen Ausdrücken völlig gewiss und dürfen sie nicht weiter einem Zufall zuschreiben.

§29 Obwohl wir aber auf diese Weise hinreichend bequem die Summe dieser Reihe

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}$$

angeben können, wenn n eine gerade Zahl ist, können wir dennoch aus diesen selben Prinzipien überhaupt nichts folgern, um die Summen zu finden, wenn n eine ungerade Zahl ist. Es könnte aber so erscheinen, dass diese Reihen auch so von der Quadratur des Kreises anhängen, dass deren Summe $= N\pi^n$ ist, natürlich auch in den Fällen, in denen n eine ungerade Zahl ist; aber wenn wir diese Summen tatsächlich durch Approximationen nehmen, werden wir sehen, dass der Koeffizient N keine rationale Zahl wird, wenn n keine gerade Zahl ist, was sich aus dieser Tabelle deutlicher zeigen wird:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\text{etc.}=1,644934067=\frac{\pi^2}{6},$$
$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\text{etc.}=1,202056903=\frac{\pi^3}{26,79435},$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}=1,082323234=\frac{\pi^4}{90},$$
$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\text{etc.}=1,036927755=\frac{\pi^5}{295,1215},$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\text{etc.}=1,017343062=\frac{\pi^6}{945},$$
$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\text{etc.}=1,008349277=\frac{\pi^7}{2995,285},$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\text{etc.}=1,004077356=\frac{\pi^8}{9450},$$
$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\text{etc.}=1,002008393=\frac{\pi^9}{29749,35},$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\text{etc.}=1,000994575=\frac{\pi^{10}}{93555},$$
$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\text{etc.}=1,000494189=\frac{\pi^{11}}{294058,7},$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\text{etc.}=1,000246087=\frac{\pi^{12}}{924041\frac{544}{691}}.$$

Und es wird in der Tat keine Relation zwischen den Summen der ungeraden Potenzen erkannt, die der ähnlich ist, welche die Summen der geraden Potenzen miteinander verbindet.

§30 Es scheint aber so, dass über die Summen der ungeraden Potenzen unter Umständen etwas gefolgert werden kann, wenn die Vorzeichen als alternierend festgelegt werden. Weil nämlich die die erste der ungeraden Potenzen

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{etc.}$$

eine bekannte Summe hat, natürlich $\log 2$, scheint es sehr wahrscheinlich zu sein, dass auch die Summen der folgenden ungeraden Potenzen vom Logarithmus von zwei und vielleicht darüber hinaus von der Quadratur des Kreises abhängen. Aber bevor wir hier irgendetwas schließen können, wollen wir die Summen der geraden Potenzen ausfindig machen und es sei

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\text{etc.}&=A\pi^2,\\
1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\text{etc.}&=B\pi^4,\\
1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\text{etc.}&=C\pi^6,\\
1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\text{etc.}&=D\pi^8,\\
1-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\text{etc.}&=E\pi^{10}\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

wo die Werte der Buchstaben A, B, C, D etc. leicht aus den bekannten Werten für dieselben Reihen, während alle Terme als positiv angenommen werden, gefolgert werden können; aber es wird besser sein, ein eigenes Gesetz für diese zu finden. Ich betrachte deshalb die folgende Reihe

$$s=A\pi^2z^2+B\pi^4z^4+C\pi^6z^6+D\pi^8z^8+\text{etc.},$$

welche nach Einsetzen der Reihen selbst in diese übergehen wird

$$s=\frac{zz}{1-zz}-\frac{zz}{4-zz}+\frac{zz}{9-zz}-\frac{zz}{16-zz}+\text{etc.},$$

welche Reihen durch § 17 summiert geben werden

$$s = \frac{\pi z}{2\sin \pi z} - \frac{1}{2}$$

oder nach Ausdrücken des Sinus

$$s = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\pi^2 z^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\pi^4 z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{\pi^6 z^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{etc.}}.$$

Wenn daher nun der vorausgehende Term in der Reihe der Buchstaben A, B, C, D, E etc. oder der vor dem ersten A befindliche $= \Delta$ gesetzt wird, wird sein

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{2},\\
A &= \frac{\Delta}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{12},\\
B &= \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\Delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
C &= \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{\Delta}{1\cdot 2\cdots 7},
\end{aligned}$$

$$D = \frac{C}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{A}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{\Delta}{1\cdot 2\cdots 9}$$

etc.

Aber der Wert von Δ ist nicht grundlos angenommen worden, sondern drückt in Wirklichkeit die Summe der vorhergehenden Reihe aus, welche ist

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} = \Delta\pi^0 = \frac{1}{2},$$

die Summen aller übrigen Reihen, die diesen vorausgehen, sind hingegen $= 0$, natürlich

$$\begin{gathered} 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{etc.} = 0, \\ 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} = 0, \\ 1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc.} = 0 \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

§31 Aus diesen Dingen folgt also, dass die Summe einer jeden Reihe aus allen vorhergehenden richtig auf diese Weise geschlossen werden kann: Wenn galt

$$\begin{gathered} 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n, \\ 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{4^{n-2}} + \text{etc.} = \beta\pi^{n-2}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 1 - \frac{1}{2^{n-4}} + \frac{1}{3^{n-4}} - \frac{1}{4^{n-4}} + \text{etc.} = \gamma\pi^{n-4}, \\ 1 - \frac{1}{2^{n-6}} + \frac{1}{3^{n-6}} - \frac{1}{4^{n-6}} + \text{etc.} = \delta\pi^{n-6} \\ \text{etc.,} \end{gathered}$$

wird sein

$$\alpha = \frac{\beta}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{\delta}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{\varepsilon}{1\cdot 2\cdots 9} + \frac{\beta}{1\cdot 2\cdots 9} - \text{etc.}$$

Um also die Summe dieser Reihe zu finden

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \text{etc.},$$

werden alle, der nach diesem Gesetz selbiger vorausgehen, betrachtet werden müssen, welche sind

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = B\pi^3,\\
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = A\pi,\\
&1 - 2 + 3 - 4 + \text{etc.} = \frac{\alpha}{\pi},\\
&1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{etc.} = \frac{\beta}{\pi^3},\\
&1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} = \frac{\gamma}{\pi^5}\\
&\qquad\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

und es wird sein

$$B = \frac{A}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{\beta}{1\cdot 2\cdots 7} - \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdots 9} + \text{etc.}$$

Aber die Summen all dieser Reihen können dargeboten werden; es gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}=\log 2,\\
&1-2+3-4+\text{etc.}=\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\text{etc.}\right),\\
&1-2^3+3^3-4^3+\text{etc.}=\frac{-1}{8}=\frac{-2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\text{etc.}\right),\\
&1-2^5+3^5-4^5+\text{etc.}=\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\text{etc.}\right),\\
&1-2^7+3^7-4^7+\text{etc.}=\frac{-17}{16}=\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdots 7}{\pi^8}\left(1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\text{etc.}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Und daher wird sein

$$
\begin{aligned}
A&=\frac{\log 2}{\pi},\\
\alpha&=\frac{2\cdot 1}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\right),\\
\beta&=\frac{-2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right),\\
\gamma&=\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}\right),\\
\delta&=\frac{-2\cdot 1\cdot 2\cdots 7}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{etc.}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\varepsilon=\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdots 9}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\text{etc.}\right)
$$

etc.

§32 Aber die Summen der geraden Potenzen der Brüche, deren Nenner ungerade Zahlen sind, haben wir oben dargeboten. Es sei

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = P\pi^2,$$
$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{etc.} = Q\pi^4,$$
$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = R\pi^6,$$
$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{etc.} = S\pi^8$$
$$\text{etc.:}$$

es wird durch § 21 sein

$$P\pi^2 + Q\pi^4 + R\pi^6 + S\pi^8 + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{2}.$$

Aber die Buchstaben α, β, γ, δ werden die folgenden Werte erhalten

$$\alpha = \frac{2\cdot 1}{\pi} P\pi^2,$$
$$\beta = \frac{-2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{\pi} Q\pi^4,$$
$$\gamma = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\pi} R\pi^6,$$

$$\delta = \frac{-2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{\pi} S\pi^8$$
$$\text{etc.}$$

Aus dem Fortschreitungsgesetz, wenn festgelegt wird

$$
\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{etc.}=A\pi=\log 2,\\
&1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\text{etc.}=B\pi^3,\\
&1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^5}+\text{etc.}=C\pi^5,\\
&1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{6^7}+\text{etc.}=D\pi^7\\
&\qquad\qquad\text{etc.},
\end{aligned}
$$

werden wir also diese Koeffizienten A, B, C, D etc. so bestimmen können, dass gilt

$$
A=\frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2\cdot 3}+\frac{Q\pi^4}{4\cdot 5}+\frac{R\pi^6}{6\cdot 7}+\frac{S\pi^8}{8\cdot 9}+\text{etc.}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
B&=\frac{A}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{Q}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\frac{R\pi^6}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}+\text{etc.}\right),\\
C&=\frac{B}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{A}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2\cdot 3\cdots 7}+\frac{Q}{4\cdot 5\cdots 9}+\frac{R\pi^6}{6\cdot 7\cdots 11}+\text{etc.}\right),\\
D&=\frac{C}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{B}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{A}{1\cdot 2\cdots 7}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{P\pi^2}{2\cdot 3\cdots 9}+\frac{Q}{4\cdot 5\cdots 11}+\text{etc.}\right)\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§33 Bevor wir es aber unternehmen daraus etwas zu schließen, wollen wir an einem Beispiel lehren, dass die gefundene Regel sich richtig verhält und daher die wahren Werte hervorgehen. Wir wollen also die erste Formel nehmen, und weil $A = \frac{\log 2}{\pi}$ ist, wird man diese Gleichung haben

$$\frac{\log 2}{2} = \frac{P\pi^2}{2\cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4\cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6\cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8\cdot 9} + \text{etc.}$$

Es ist aber durch Approximieren der wahren Werte

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,693147181,\\
P\pi^2 &= 1,233700550,\\
Q\pi^4 &= 1,014678032,\\
R\pi^6 &= 1,001447077,\\
S\pi^8 &= 1,000155179,\\
T\pi^{10} &= 1,000017041,\\
V\pi^{12} &= 1,000001886,\\
W\pi^{14} &= 1,000000209,\\
X\pi^{16} &= 1,000000023,\\
Y\pi^{18} &= 1,000000003
\end{aligned}$$

etc.

Wir wollen nun zunächst die ganzen Einheiten von $P\pi^2$, $Q\pi^4$ etc. nehmen; wir werden haben

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{8\cdot 9} + \text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe bekannt ist, welche natürlich ist

$$= 1 - \log 2 \quad \text{oder} \quad 0,306852819;$$

nun wollen wir die angehefteten Brüche derselben Terme nehmen, welche durch die jeweiligen Nenner dividiert geben werden

$$
\begin{array}{r}
0{,}038950092 \\
0{,}000733902 \\
34454 \\
2155 \\
155 \\
12 \\
1 \\
\hline
0{,}039720771;
\end{array}
$$

es werde $1-\log 2$ addiert

$$
\begin{array}{r}
0{,}306852819 \\
\hline
0{,}346573590.
\end{array}
$$

Aber es ist hingegen

$$\frac{\log 2}{2} = 0{,}346573590.$$

woher die Gleichheit in glänzender Weise erkannt wird.

§34 Weil also nun die Gültigkeit der in § 32 erwähnten Proposition feststeht, haben wir ein Gesetz, nach welchen die Summen der Reihen

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\text{etc.},$$

während n irgendeine ungerade Zahl bezeichnet, fortschreiten. Aber weil uns nur aus einer Beobachtung bekannt ist, dass gilt

$$\frac{\log 2}{2} = \frac{P\pi^2}{2\cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4\cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6\cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8\cdot 9} + \text{etc.}$$

oder

$$\log 2 = \left\{\begin{array}{llllllll} + & \frac{1}{3}\Big(1 & +\frac{1}{3^2} & +\frac{1}{5^2} & +\frac{1}{7^2} & +\frac{1}{9^2} & +\text{etc.}\Big) \\ + & \frac{1}{10}\Big(1 & +\frac{1}{3^4} & +\frac{1}{5^4} & +\frac{1}{7^4} & +\frac{1}{9^4} & +\text{etc.}\Big) \\ + & \frac{1}{21}\Big(1 & +\frac{1}{3^6} & +\frac{1}{5^6} & +\frac{1}{7^6} & +\frac{1}{9^6} & +\text{etc.}\Big) \\ + & \frac{1}{36}\Big(1 & +\frac{1}{3^8} & +\frac{1}{5^8} & +\frac{1}{7^8} & +\frac{1}{9^8} & +\text{etc.}\Big) \\ + & \frac{1}{55}\Big(1 & +\frac{1}{3^{10}} & +\frac{1}{5^{10}} & +\frac{1}{7^{10}} & +\frac{1}{9^{10}} & +\text{etc.}\Big) \end{array}\right\}$$
$$\text{etc.}$$

wird es der Mühe wert sein, nach einem Beweis dieser Wahrheit zu suchen. Wir wollen also festlegen

$$s = \frac{P\pi^2}{2\cdot 3} + \frac{Q\pi^4}{4\cdot 5} + \frac{R\pi^6}{6\cdot 7} + \frac{S\pi^8}{8\cdot 9} + \text{etc.}$$

und es werden die folgenden Transformationen durchgeführt

$$\begin{aligned} \frac{d.\pi s}{d\pi} &= \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.}, \\ \frac{dd.\pi s}{d\pi^2} &= P\pi^2 + Q\pi^4 + R\pi^6 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Weil diese letzte Reihe, wenn sie mit π multipliziert wird, die Summe $\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{2}$ hat, welcher Ausdruck Geltung hat, auch wenn π eine variable Größe ist, so wie wir hier festgelegt haben, wird deshalb sein

$$dd.\pi s = \frac{d\pi^2}{4}\tan\frac{\pi}{2}$$

und daher

$$d.\pi s = \frac{d\pi}{4}\int d\pi \tan\frac{\pi}{2}$$

und schließlich

$$s = \frac{1}{4\pi}\int d\pi \int d\pi \tan\frac{\pi}{2},$$

die Wurzel welcher Gleichung schon bekannt ist, sie ist natürlich

$$s = \frac{\log 2}{2}.$$

§35 Wir wollen zuerst diese Formel betrachten

$$\int d\pi \tan\frac{\pi}{2},$$

welche übergeht in

$$\int \frac{d\pi \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = -2 \log \cos \frac{\pi}{2};$$

nachdem aber dieses Integral eingesetzt worden ist, werden wir haben

$$s = \frac{-1}{\pi} \int \frac{d\pi}{2} \log \cos \frac{\pi}{2}.$$

Um diese Formel zu integrieren, setze ich

$$\tan \frac{\pi}{2} = t;$$

es wird sein

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+tt}}$$

und sowohl

$$-\log \cos \frac{\pi}{2} = \log \sqrt{1+tt} = \frac{1}{2} \log(1+tt)$$

als auch

$$\frac{d\pi}{2} = \frac{dt}{1+tt};$$

daher wird sein

$$s = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dt}{1+tt} \log(1+tt),$$

und deshalb ist die Frage darauf zurückgeführt worden, dass das Integral $\int \frac{dt \log(1+tt)}{1+tt}$ unter Verwendung einer solchen Konstante bestimmt wird, dass das Integral für $z = 0$ gesetzt verschwindet; danach muss wieder $t = \tan \frac{\pi}{2}$ gesetzt werden und wegen $\frac{\pi}{2}$ = einem Bogen von 90° wird $t = \infty$ sein. Aber diese Formel, weil ist

$$\log(1+tt) = \frac{tt}{1+tt} + \frac{t^4}{2(1+tt)^4} + \frac{t^6}{3(1+tt)^3} + \frac{t^8}{4(1+tt)^4} + \text{etc.},$$

geht in die folgende über, so dass ist

$$\int \frac{dt}{1+tt} \log(1+tt)$$

$$= \int \frac{ttdt}{(1+tt)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{t^4 dt}{(1+tt)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{t^6 dt}{(1+tt)^4} + \frac{1}{4}\int \frac{t^6 dt}{(1+tt)^5} + \text{etc.}$$

Durch die Reduktion der Integralformeln ist aber allgemein

$$\int \frac{t^{2m}}{(1+tt)^{m+1}} = \frac{-t^{2m-1}}{2m(1+tt)^m} + \frac{2m-1}{2m}\int \frac{t^{2m-2}}{(1+tt)^m}.$$

Daher, weil gilt

$$\int \frac{dt}{1+tt} = \frac{\pi}{2},$$

wird sein

$$\int \frac{ttdt}{(1+tt)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+tt},$$

$$\int \frac{t^4 dt}{(1+tt)^3} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2},$$

$$\int \frac{t^6 dt}{(1+tt)^4} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3},$$

$$\int \frac{t^8 dt}{(1+tt)^5} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2}$$
$$-\frac{1\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} - \frac{1}{8}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4},$$

$$\int \frac{t^{10} dt}{(1+tt)^6} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t}{1+tt} - \frac{1\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2}$$
$$-\frac{1\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} - \frac{1\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} - \frac{1}{10}\cdot\frac{t^9}{(1+tt)^5}$$
$$\text{etc.}$$

Nach Einsetzen von diesen wird entspringen

$$\int \frac{dt}{1+tt}\log(1+tt)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t}{1+tt}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t^3}{4(1+tt)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t^5}{6(1+tt)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.}\right)$$
$$- \frac{t^7}{8(1+tt)^4}\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{10\cdot 5} + \frac{9\cdot 11}{10\cdot 12\cdot 6} + \frac{9\cdot 11\cdot 13}{10\cdot 12\cdot 14\cdot 7} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

§36 Wir wollen zuerst die Summe dieser Reihe suchen

$$\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}+\text{etc.}$$

und wir wollen festlegen

$$s=\frac{x}{2\cdot 1}+\frac{1\cdot 3x^2}{2\cdot 4\cdot 2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}+\text{etc.};$$

es wird sein

$$s=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}-\log x,$$

wie dem, der die Rechnung durchführt, leicht klar werden wird. Aber es ist

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=c-\log(1+\sqrt{1-x})+\log(1-\sqrt{1-x})$$

und daher

$$s=c-\log(1+\sqrt{1-x})+\log(1-\sqrt{1-x})-\log x,$$

wo die Konstante c so beschaffen sein muss, dass nach Setzen von $x=0$ $s=0$ wird. Es werde also x unendlich klein; es wird sein

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}$$

und

$$\log(1-\sqrt{1-x}) = \log\frac{x}{2} = \log x - \log 2$$

und

$$\log(1+\sqrt{1-x}) = \log 2,$$

woher $c = 2\log 2$ wird. Es werde nun $x = 1$ festgelegt; es wird $s = 2\log 2$ sein und

$$\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.} = 2\log 2.$$

Aus dieser Reihe werden aber die Summen der übrigen Reihen so bestimmt werden, dass gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.} &= \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot 2\log 2 - \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 2},\\
\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.} &= \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\cdot 2\log 2 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 2} - \frac{6}{5\cdot 2},\\
\frac{1}{4} + \frac{9}{10\cdot 5} + \frac{9\cdot 11}{10\cdot 12\cdot 6} + \frac{9\cdot 11\cdot 13}{10\cdot 12\cdot 14\cdot 7} + \text{etc.} &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\cdot 2\log 2 - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2} - \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 2} - \frac{8}{7\cdot 3}
\end{aligned}$$

etc.

Nach Einsetzen dieser Summen wird hervorgehen

$$\int \frac{dt}{1+tt}\log(1+tt)$$

$$
\begin{aligned}
=\frac{\pi}{2}\cdot 2\log 2 - \frac{t}{1+tt}\cdot 2\log 2 \\
-\frac{t^3}{(1+tt)^2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\log 2 - \frac{1}{3\cdot 1}\right) \\
-\frac{t^5}{(1+tt)^3}\left(\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot 2\log 2 - \frac{4}{3\cdot 5\cdot 1} - \frac{1}{5\cdot 2}\right) \\
-\frac{t^7}{(1+tt)^4}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot 2\log 2 - \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 1} - \frac{6}{5\cdot 7\cdot 2}\right) \\
-\frac{t^9}{(1+tt)^5}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot 2\log 2 - \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 1} - \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 2} - \frac{1}{9\cdot 4}\right) \\
\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§37 Weil ja aber für unser Unterfangen nach durchgeführter Integration $t = \infty$ gesetzt werden muss, wird werden

$$\int \frac{dt}{1+tt}\log(1+tt) = \pi \log 2$$

sowie

$$s = \frac{1}{2}\pi \int \frac{dt}{1+tt}\log(1+tt) = \frac{\log 2}{2},$$

welches jener Wert selbst ist, den wir vorhergesehen haben hervorgehen zu müssen (§ 34). Denn die übrigen Terme im Ausdruck, welchen wir für

$$\int \frac{dt}{1+tt}\log(1+tt)$$

gefunden haben, wenn $t = \infty$ gesetzt wird, verschwinden alle, weil in den

Nennern der einzelnen Termen t mehr Dimensionen hat als in den Zählern und darüber hinaus die numerischen Koeffizienten schrumpfen. Denn wenn dies nicht geschähe, könnten wir nicht sicher schließen, dass die Summe aller Terme, von welchen jeder verschwindet, $= 0$ ist. Denn wenn eines Beispiels wegen nur die ersten Teile der numerischen Koeffizienten angenommen werden, dass diese Reihe hervorginge

$$\frac{t}{1+tt} + \frac{2t^3}{3(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4t^5}{3\cdot 5(1+tt)^5} + \frac{2\cdot 4\cdot 6t^7}{3\cdot 5\cdot 7(1+tt)^4} + \text{etc.},$$

wird die Summe selbiger im Fall, in dem $t = \infty$ ist, endlich und $= \frac{\pi}{2}$, auch wenn die einzelnen Termen verschwinden; wenn daher aber die ganzzahligen Koeffizienten genommen werden, wird wegen der sehr stark konvergierenden Reihe derer auch die ganze Reihe $= 0$.

§38 Wir wollen nun nach der Summe dieser Reihe suchen

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \text{etc.} = B\pi^3,$$

welche Summe durch § 32 sein wird

$$B\pi^3 = \frac{\pi^2 \log 2}{1\cdot 2\cdot 3} - 2\pi^2\left(\frac{P\pi^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{Q\pi^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{R\pi^6}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.}\right).$$

Um den Wert dieser Größe zu finden, sei

$$s = \frac{P\pi^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{Q\pi^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{R\pi^6}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \text{etc.};$$

es wird sein

$$\begin{aligned}
\frac{d.\pi^3 s}{d\pi} &= \frac{P\pi^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{Q\pi^6}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{R\pi^8}{6\cdot 7\cdot 8} + \text{etc.},\\
\frac{dd.\pi^3 s}{d\pi^2} &= \frac{P\pi^3}{2\cdot 3} + \frac{Q\pi^5}{4\cdot 5} + \frac{R\pi^7}{6\cdot 7} + \text{etc.},\\
\frac{d^3.\pi^3 s}{d\pi^3} &= \frac{P\pi^2}{2} + \frac{Q\pi^4}{4} + \frac{R\pi^6}{6} + \text{etc.},\\
\frac{d^4.\pi^3 s}{d\pi^4} &= P\pi + Q\pi^3 + R\pi^5 + \text{etc.} = \frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Durch Rückwärtsgehen wird also sein

$$\begin{aligned}
\frac{d^3.\pi^3 s}{d\pi^3} &= \frac{1}{4}\int d\pi \tan\frac{\pi}{2},\\
\frac{dd.\pi^3 s}{d\pi^2} &= \frac{1}{4}\int d\pi \int d\pi \tan\frac{\pi}{2},\\
\frac{d.\pi^3 s}{d\pi} &= \frac{1}{4}\int d\pi \int d\pi \int d\pi \tan\frac{\pi}{2},\\
\pi^3 s &= \frac{1}{4}\int d\pi \int d\pi \int d\pi \int d\pi \tan\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Und daher wird man die Summe der vorgelegten Reihen haben

$$B\pi^3 = \frac{\pi^2 \log 2}{6} - \frac{1}{2\pi}\int d\pi \int d\pi \int d\pi \int d\pi \tan\frac{\pi}{2},$$

all welche Integrale so angenommen werden müssen, dass sie für $\pi = 0$ gesetzt verschwinden.

§39 Es werde $\frac{\pi}{2} = q$ gesetzt, so dass nach Durchführen der Integrationen q den vierten Teil der Peripherie des Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, oder den

Bogen von 90 Grad bezeichnet. Und es sei weiter

$$\sin q = y \quad \text{und} \quad \cos q = x = \sqrt{1 - yy};$$

es wird sein

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{y}{x}.$$

Daher wird wegen $\pi = 2q$ die Summe unserer Reihe sein

$$B\pi^3 = \frac{2qq \log 2}{3} - \frac{4}{q} \int dq \int dq \int dq \int \frac{ydq}{x}.$$

Wir wollen durchgehend festlegen

$$\int dq \int dq \int dq \int \frac{ydq}{x} = u;$$

es wird sein

$$B\pi^3 = \frac{2qq \log 2}{3} - \frac{4u}{q},$$

wo bei der zu findenden Größe u alle Integrationen so angenommen werden müssen, dass die einzelnen Integrale verschwinden, nachdem $q = 0$ und $y = 0$ gesetzt worden ist; nachdem aber die Integrationen durchgeführt worden sind, wird $y = 1$ und $x = 0$ sein. Es ist hingegen

$$\int \frac{ydq}{x} = \int \frac{ydy}{1 - yy} = -\log \sqrt{1 - yy} = \log \frac{1}{x}$$

und

$$\log \frac{1}{x} = \frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} + \text{etc.}$$

Weil nun ist

$$u = \int dq \int dq \int dq \log \frac{1}{x},$$

wird durch eine Reduktion der Integrale sein

$$u = q \int dq \int dq \log \frac{1}{x} - \int qdq \int dq \log \frac{1}{x}$$

und weiter

$$\int dq \int dq \log \frac{1}{x} = q \int dq \log \frac{1}{x} - \int qdq \log \frac{1}{x},$$
$$\int qdq \int dq \log \frac{1}{x} = \frac{qq}{2} \int dq \log \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int qqdq \log \frac{1}{x},$$

also

$$u = \frac{1}{2} qq \int dq \log \frac{1}{x} - q \int qdq \log \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int qqdq \log \frac{1}{x},$$

so dass wir nun drei einfache Integralformeln haben, welche wir integrieren müssen.

§40 Wir wollen diese drei Formeln einzelnen und zuerst freilich diese $\int dq \log \frac{1}{x}$ betrachten; auch wenn wir diese schon oben integriert haben [§ 35], wollen wir dennoch dieselbe aus der Betrachtung der Sinus und Kosinus erneut integrieren, damit der Weg erleichtert wird, um die übrigen zu integrieren. Es ist also

$$\int dq \log \frac{1}{x} = \int dq \left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \frac{y^{10}}{10} + \text{etc.} \right)$$

Um dieses Integral zu finden, werde irgendein Glied - $\int y^{n+2} dq$ - von diesem betrachtet, und weil gilt

$$dq = \frac{dy}{x} = \frac{-dx}{y} \quad \text{und} \quad xx + yy = 1,$$

wird sein

$$\int y^{n+2} dq = - \int y^{n+1} dx = -y^{n+1} x + (n+1) \int y^n x dy;$$

aber es ist

$$\int y^n x dy = \int y^n x^2 dq = \int y^n dq - \int y^{n+2} dq$$

- wegen $xx = 1 - yy$; daher wird sein

$$\int y^{n+2} dq = -y^{n+1} x + (n+1) \int y^n dq - (n+1) \int y^{n+2} dq$$

und

$$\int y^{n+2} dq = \frac{-y^{n+2}}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} \int y^n dq.$$

Daraus wird deshalb das Integral eines jeden Gliedes auf das Integral des vorhergehenden zurükgeführt, und weil ja nach durchgeführter Integration $x = 0$ wird, wird für diesen Fall gelten

$$\int y^{n+2} dq = \frac{n+1}{n+2} \int y^n dq.$$

Aus dieser Formel werden also die einzelnen Teile des Integrals aufgefunden werden wie folgt

$$\begin{aligned}
\int y^2 dq &= \frac{1}{2}q,\\
\int y^4 dq &= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}q,\\
\int y^6 dq &= \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}q,\\
\int y^8 dq &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}q\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Dieser Sache wegen wird man haben

$$\int dq \log\frac{1}{x} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right);$$

weil die Summe dieser Reihe schon oben (§ 36) als $= 2\log 2$ gefunden worden ist, wird gelten

$$\int dq \log\frac{1}{x} = q\log 2.$$

§41 Wir wollen nur zur zweiten Integralformel $\int qdq \log\frac{1}{x}$ fortschreiten, welche übergeht in

$$\int qdq\log\frac{1}{x} = \int qdq\left(\frac{yy}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8} + \text{etc.}\right),$$

von welcher wir irgendeinen Teil betrachten wollen, also

$$\int y^{n+2}qdq = -\int y^{n+1}qdx = -y^{n+1}qx + \int y^{n+1}xdq + (n+1)\int y^n qxdy$$
$$= -y^{n+1}qx + \frac{y^{n+2}}{n+2} + (n+1)\int y^n qdq - (n+1)\int y^{n+2}qdq.$$

Nachdem deshalb $y = 1$ und $x = 0$ gesetzt worden ist, wird sein

$$\int y^{n+2}qdq = \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{n+1}{n+2}\int y^n qdq.$$

Die Integrale der einzelnen Glieder werden sich also so verhalten:

$$\int y^2qdq = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{2},$$
$$\int y^4qdq = \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{q^2}{2},$$
$$\int y^6qdq = \frac{1}{6^2} + \frac{5}{6\cdot 4^2} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{q^2}{2},$$
$$\int y^8qdq = \frac{1}{8^2} + \frac{7}{8\cdot 6^2} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4^2} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{q^2}{2}$$
$$\text{etc.}$$

Daher wird das Integral erhalten werden

$$\int qdq\log\frac{1}{x} = +\frac{qq}{4}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{1}{2\cdot 2^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{3}{4\cdot 2}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2\cdot 4^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6\cdot 3}+\frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2\cdot 6^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{8\cdot 4}+\frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5}+\frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6}+\text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

oder auch in dieser Form

$$\begin{aligned}\int qdq\log\frac{1}{x}=\frac{qq}{4}\Bigg(&\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}+\text{etc.}\Bigg)\\
&+\frac{1}{2^2\cdot 2}+\frac{1}{4^2\cdot 4}+\frac{1}{6^2\cdot 6}+\frac{1}{8^2\cdot 8}+\text{etc.}\\
&+\frac{3}{2^2\cdot 4^2}+\frac{5}{4^2\cdot 6^2}+\frac{7}{6^2\cdot 8^2}+\frac{9}{8^2\cdot 10^2}+\text{etc.}\\
&+\frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 4\cdot 6^2}+\frac{5\cdot 7}{4^2\cdot 6\cdot 8^2}+\frac{7\cdot 9}{6^2\cdot 8\cdot 10^2}+\frac{9\cdot 11}{8^2\cdot 10\cdot 12^2}+\text{etc.}\\
&+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{4^2\cdot 6\cdot 8\cdot 10^2}+\frac{7\cdot 9\cdot 11}{6^2\cdot 8\cdot 10\cdot 12^2}+\frac{9\cdot 11\cdot 13}{8^2\cdot 10\cdot 12\cdot 14^2}+\text{etc.}\\
&\text{etc.}\end{aligned}$$

aber diese Reihen involvieren das selbst, was in der Frage steht, natürlich die Summation der Kuben der Terme der harmonischen Reihe.

§42 Wenn wir daher der Vorgehensweise bei der ersten Form folgen, werden alle Reihen summierbar (§ 36) und man wird haben

$$\int qdq \log \frac{1}{x} = \frac{qq}{2} \log 2 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{2}{1}\log 2\right)$$
$$+\frac{1}{4^2}\left(\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\log 2 - \frac{4}{3\cdot 2}\right)$$
$$+\frac{1}{6^2}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}\log 2 - \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 2} - \frac{6}{5\cdot 4}\right)$$
$$+\frac{1}{8^2}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\log 2 - \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 2} - \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 4} - \frac{8}{7\cdot 6}\right)$$
$$\text{etc.},$$

welche, wenn erneut die Reihen spaltenweise genommen werden, geben

$$\int qdq \log \frac{1}{x} = \frac{qq}{2}\log 2 + \log 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5\cdot 6} + \frac{4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 8} + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{1}{4\cdot 5}\left(\frac{1}{6} + \frac{6}{7\cdot 8} + \frac{6\cdot 8}{7\cdot 9\cdot 10} + \frac{6\cdot 8\cdot 10}{7\cdot 9\cdot 11\cdot 12} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{1}{8} + \frac{8}{9\cdot 10} + \frac{8\cdot 10}{9\cdot 11\cdot 12} + \frac{8\cdot 10\cdot 12}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 14} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Aber es ist

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8} + \text{etc.} = \frac{qq}{2},$$

woher sein wird

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{5\cdot 6}+\frac{4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 8}+\text{etc.}=\frac{3}{2}\cdot\frac{qq}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{6}+\frac{6}{7\cdot 8}+\frac{6\cdot 8}{7\cdot 9\cdot 10}+\text{etc.}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{qq}{2}-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{8}+\frac{8}{9\cdot 10}+\frac{8\cdot 10}{9\cdot 11\cdot 12}+\text{etc.}=\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{qq}{2}-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5\cdot 7}{4\cdot 6}\cdot\frac{1}{4}-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{6}$$
$$\text{etc.}$$

Deswegen wird man haben

$$\begin{aligned}\int qdq\log\frac{1}{x}=qq\log 2-\frac{qq}{2}&\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2\cdot 4^2}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2}+\text{etc.}\right)\\
&+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\\
&+\frac{3}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{4}\\
&+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{4\cdot 6^2}+\frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{6}\\
&+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{6\cdot 8^2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{8^2}\cdot\frac{1}{8}\\
&\text{etc.}\end{aligned}$$

§43 Aber unter Umständen wird die Schwierigkeit, einen angenehmen Ausdruck zu finden, vermindert werden, wenn wir jene drei Integralformeln sammeln. Dieser Sache wegen wollen wir die dritte Formel nehmen

$$\int qqdq\log\frac{1}{x},$$

die übergeht in

$$\int qqdq\left(\frac{yy}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}+\frac{y^8}{8}+\text{etc.}\right).$$

Es werde diese Formel betrachtet

$$\int y^{n+2}qqdq,$$

welche dann übergeht in

$$\begin{aligned}
-\int y^{n+1}qqdx &= -y^{n+1}qqx+2\int y^{n+1}qxdq+(n+1)\int y^n qqxdy\\
&= -y^{n+1}qqx+2\int y^{n+1}qdy+(n+1)\int y^n qqdq-(n+1)\int y^{n+2}qqdq;
\end{aligned}$$

daher wird also sein

$$\int y^{n+2}qqdq=\frac{-y^{n+1}qqx}{n+2}+\frac{2}{n+2}\int y^{n+1}qdy+\frac{n+1}{n+2}\int y^n qqdq.$$

Aber es ist

$$\int y^{n+1}qdy=\frac{y^{n+2}q}{n+2}-\frac{1}{n+2}\int y^{n+2}dq=\frac{q}{n+2}-\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(n+2)}q,$$

nachdem $y=1$ gesetzt worden ist (§ 40). Als logische Konsequenz wird sein

$$\int y^{n+2}qqdq=\frac{2q}{(n+2)}\left(1-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(n+2)}\right)+\frac{n+1}{n+2}\int y^n qqdq$$

und die einzelnen Glieder des gesuchten Integrals werden diese sein

$$\int y^2 qqdq = \frac{1}{2^2}2q - \frac{1}{2^2\cdot 2}2q + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^3}{3},$$
$$\int y^4 qqdq = \frac{1}{4^4}2q - \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}2q + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4}2q - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}2q + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{q^3}{3},$$
$$\int y^6 qqdq = \frac{2q}{6}\left(1-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right) + \frac{5}{6}\cdot\frac{2q}{4^2}\left(1-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right) + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{2q}{2^2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{q^3}{3}$$
$$\text{etc.}$$

Nachdem diese Werte eingesetzt worden und die Terme in Ordnung gebracht worden sind, wird schließlich aufgefunden werden

$$\begin{aligned}\int qqdq\log\frac{1}{x} = {} & \frac{q^3}{6}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \text{etc.}\right)\\
& + \frac{1}{2^2}q\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{3}{4\cdot 2} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)\\
& + \frac{1}{4^2}q\left(1-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)\\
& + \frac{1}{6^2}q\left(1-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.}\right)\\
& \text{etc.}\end{aligned}$$

Weil aber gilt

$$= \frac{1}{2}qq\int dq\log\frac{1}{x} - q\int qdq\log\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int qqdq\log\frac{1}{x},$$

wird nach Addieren dieser Integrale, wie sie gefunden worden sind, sein

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{q^3}{12}\left(\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} + \text{etc.}\right)\\
& -\frac{q}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{3}{4\cdot 2} + \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 4} + \text{etc.}\right)\\
& -\frac{q}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{6\cdot 8\cdot 10\cdot 5} + \text{etc.}\right)\\
& -\frac{q}{2\cdot 6^2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{8\cdot 4} + \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10\cdot 5} + \frac{7\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 10\cdot 12\cdot 6} + \text{etc.}\right)\\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Nachdem aber diese Reihen wie oben [§ 36] integriert worden sind, wird sein

$$
\begin{aligned}
u = \frac{q^3}{6}\log 2 - \frac{q}{2\cdot 2^2} & \quad 2\log 2,\\
& -\frac{q}{2\cdot 2^4}\left(2\log 2 - \frac{1}{2\cdot 1}\right),\\
& -\frac{q}{2\cdot 2^6}\left(2\log 2 - \frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2}\right),\\
& -\frac{q}{2\cdot 2^8}\left(2\log 2 - \frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3}\right),\\
& -\frac{q}{2\cdot 2^{10}}\left(2\log 2 - \frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 4}\right)\\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Es ist aber

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.} = \frac{qq}{6},$$

woher wird

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{q}{2 \cdot 2} && \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{1 \cdot 3q}{2 \cdot 4 \cdot 4} && \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5q}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} && \left(\frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{etc.} \right) \\
& + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7q}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} && \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \text{etc.} \right) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Daher wird also sein

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{q}{2 \cdot 2} && \left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} \right) \\
& + \frac{1 \cdot 3q}{2 \cdot 4 \cdot 4} && \left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\
& + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5q}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} && \left(\frac{qq}{6} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

oder nachdem die erste vertikale Reihe tatsächlich summiert worden ist

$$u = \frac{q^3}{6} \log 2 - \frac{q}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1\cdot 3q}{2\cdot 4\cdot 4}\quad\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}\right)\\
&-\frac{1\cdot 3\cdot 5q}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}\right)\\
&\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§44 Weil nun die Summe unserer vorgelegten Reihe

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\text{etc.}$$

ist

$$=B\pi^3=\frac{2qq\log 2}{3}-\frac{4u}{q},$$

wird dieselbe Summe werden

$$
\begin{aligned}
=&+\frac{1}{2\cdot 2}\cdot 1\\
&+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\\
&+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)\\
&+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 8}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)\\
&\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Oder weil gilt

$$\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}+\text{etc.}=\log 2,$$

wird die Summe der vorgelegten Reihe sein

$$\begin{aligned}B\pi^3=\log 2&+\frac{1}{2^2}\left(\log 2-\frac{1}{2\cdot 2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(\log 2-\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\right)\\&+\frac{1}{4^2}\left(\log 2-\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\right)+\text{etc.},\end{aligned}$$

oder diese selbe Summe wird so ausgedrückt werden können, dass gilt

$$\begin{aligned}B\pi^3=\frac{\pi^2}{6}\log 2-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}&\\-\frac{1}{3^2}&\left(\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\right)\\-\frac{1}{4^2}&\left(\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\right)\\-\frac{1}{5^2}&\left(\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 8}\right)\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Weil wir ja aber, wie auch immer wir diese Reihen transformieren, sie nicht auf eine einfache Reihe, deren Summe bekannt ist, zurückführen können, wollen wir diese Aufgabe abbrechen, mit den vielen Ausdrücken zufrieden, welche wir der vorgelegten Reihe

$$1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\text{etc.}$$

gleich zu sein gefunden haben.